

Směšený součin je skalární součin jednoho vektoru s vektorovým součinem dvou jiných vektorů. Všechny tři vektory musí být vzájemně různoběžné.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

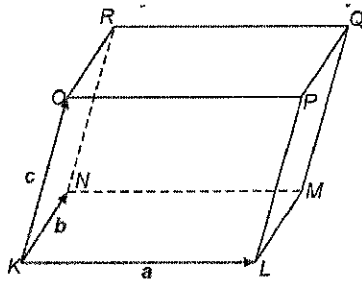
Př. Vypočítejte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 1; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 2)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \vec{a} \times \vec{b} = (3; -4; -5) \\ \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -3 - 4 - 10 = -17$$

Absolutní hodnota výsledku nezáleží na pořadí vektorů. Odlišnost ve znaménku je způsobena pořadím vektorů ve vektorovém součinu, protože $\vec{w} \times \vec{v} = -1 \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \vec{c} \times \vec{a} = (-5; 1; -3) \\ \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -5 + 1 - 3 = -7$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \vec{c} \times \vec{b} = (-1; 7; -4) \\ \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -1 + 7 + 4 = 10$$



Pro objem rovnoběžnostěnu platí vztah

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

Př. Vypočítejte objem kvádru KLMNOPQR: $K=[0;2;1]$, $L=[2;1;4]$, $N=[1;7;2]$, $O=[32;0;-21]$

Nejprve ověřte, že je to kvádr (vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} jsou vzájemně kolmé)

Výpočet proveďte přes výše uvedený vzorec a ověřte pomocí výpočtu délek jednotlivých stran kvádrů.

$$\begin{array}{l} \vec{a} = L - K = (2; -1; 3) \\ \vec{b} = N - K = (1; 5; 1) \\ \vec{c} = O - K = (32; -2; -22) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 5 + 3 = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 64 + 2 - 66 = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 32 - 10 - 22 = 0 \end{array} \right\} \text{ jsou vzájemně kolmé!}$$

$$\vec{a}: \begin{array}{ccc} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-16; 1; 11)$$

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

$$V = |-16 \cdot 32 - 2 - 22 \cdot 11|$$

$$V = 756 \text{ j}^3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1024+4+484} = \sqrt{1512}$$

$$V = \sqrt{14 \cdot 27 \cdot 1512}$$

$$V = \sqrt{571536}$$

$$V = 756 \text{ j}^3$$

Pomocí smíšeného součinu, lze zjistit i lineární závislost vektorů v prostoru.

Pro určení zda body A, B, C, D leží v rovině

$$a) A = [2; -3; 4], B = [3; -1; 7], C = [0; 2; 5], D = [7; -2; 12]$$

$$\vec{u} = B - A = (1; 2; 3)$$

$$\vec{v} = C - A = (-2; 5; 1)$$

$$\vec{w} = D - A = (5; 1; 8)$$

$$\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$$

$$5 = k - 2l \quad |(-2)|$$

$$1 = 2k + l$$

$$8 = 3k + l$$

$$-9 = 9l$$

$$l = -1$$

$$5 = k + 2$$

$$k = 3$$

ZK do 3. rovnice

$$L_3 = \rho \quad \rho_3 = 9 - 1 = 8$$

ANO leží

Rěšení přes smíšený součin

$$\vec{u}: \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ \vec{v}: 5 & 1 & -2 \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-13; -7; 9)$$

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -65 - 7 + 72 = 0$$

Objem komolitého tělesa je nulový, protože A, B, C, D leží v rovině

$$b) A = [0; 3; -2], B = [2; 2; -1], C = [1; 6; 0], D = [4; 8; 2]$$

$$\vec{u} = B - A = (2; -1; 1)$$

$$\vec{v} = C - A = (1; 3; 2)$$

$$\vec{w} = D - A = (4; 5; 4)$$

$$\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$$

$$14 = 7l$$

$$4 = 2k + l$$

$$l = 2$$

$$5 = -k + 3l \quad |(-2)|$$

$$4 = 2k + 2$$

$$4 = k + 2l$$

$$k = 1$$

ZK do 3.

$$L_3 = 4 \quad \rho_3 = 1 + 4 = 5$$

NE leží

Rěšení přes smíšený součin

$$\vec{u}: \begin{matrix} -1 & 1 & 2 \\ \vec{v}: 3 & 2 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-5; -3; 7)$$

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -20 - 15 + 21 = -14 \neq 0$$

Objem není nulový \Rightarrow komolité těleso existuje a body v rovině neleží